关于口径，焦比，信噪比，分辨率的那些故事

可喵

2020 年 11 月 10 日

1　一些奇怪的话

从这一次开始，某猫开始尝试写一些新内容，这些内容不涉及到后期处理的技巧，免得大家对我的印象逐渐变成了一只做图像处理的猫。这些文章里会谈到天文摄影中的一些基础问题，例如单色/彩色相机，口径与焦比，就从这个在各大天文论坛上都被科普烂了的口径与焦比开始谈起吧。

早在牧夫论坛~~还活着~~还很活跃的时候，我们就能看到类似于这样的帖子：

某楼主：（用 8 英寸的牛反拍了个 M42）

回帖 1：真漂亮！

回帖 2：大片，顶一个

回帖 3：大口径就是爽

回帖 4：大口径的效率还是高啊

然而其实就算到了今天，当你说“拍摄效率高”的时候，甚至不知道自己在说什么，也不知道拍摄效率的具体内涵是什么。所以可瞄觉得有必要深入讨论一下这个问题。本篇不会有实质性的操作介绍，只是试图用一些形象的例子来给大家理清我们常用的概念。

阅读本文需要：

高中数学（概率论部分）

2　口径和焦比

对于一台天文望远镜，通常当它的“眼睛”的大小，就是口径。如果不考虑波动光学的效应，平行光入射望远镜最终会汇聚成一个几何意义上的点，称之为焦点。如果你的光学系统只是一个放大镜，那么焦距等于焦点与透镜光心的距离（初中光学知识）。但对于天文望远镜以及大量的相机广角镜头来说，焦距的定义要复杂一些。从焦点的位置出发我们会看到一个光锥，我们把光锥的外边界和未经过折射的入射平行光相交，取得一个截面。这个截面与焦点的距离就是焦距，见图 1。这个原则适用于摄影镜头，折射望远镜和卡塞格林式望远镜，但不适用于牛反折轴系统。

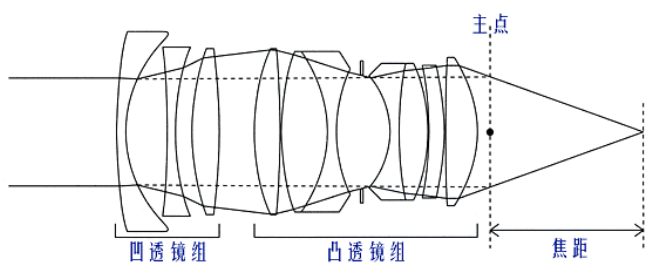

图 1: 焦点

焦比指的是焦距与口径的比值。如果你一点摄影知识都没接触过，我们先来考虑一个问题：为什么要定义焦比？

一些关于摄影的常识性资料上会告诉我们，因为焦比与光学系统的成像亮度紧密相关，焦比越短，成像亮度就越高。下面我给出一个简单的半定量的证明，来说明成像亮度与焦比、口径之间的关系。

首先考虑一个无穷远处的点光源平行于光轴入射的情况。其实这就是天文摄影中的像场中心星点了。像场中不在中心的星点，就是斜入射的平行光线带来的。我们首先注意到，按照几何光学的约定，无论焦距多长，平行光在没有像差的望远镜上成像都是一个点。假设一个点的总光功率为 P，被镜头捕

捉的光功率就是:

$$\frac{P}{4\pi r^2} \times \frac{1}{4}\pi D^2 = \frac{P}{16r^2}D^2 \tag{1}$$

其中 D 是口径，r 是天体离我们的距离，很遥远。根据通量守恒，无论焦距有多长，这些光功率显然都汇聚到了焦点上，所以:

结论 1: 点光源成像的亮度，与焦比无关，只与口径的平方成正比。

这一点最集中的体现，你可以去看看每个人拍的 M33。小口径和大口径的镜子，能分解出的 M33 上的恒星是不一样的。例如: 一个 100F/4 的镜子，使用 2.4um 的相机，和一个 200F/4 的镜子使用 4.8um 的相机，它们的分辨率一样，但相同时间下能分解出的星系中的恒星是不一样多的、小口径望远镜里看起来是一团雾的东西，在大望远镜里其实是许多恒星组合成的。

来，再思考一个稍微复杂一点的情况：面光源。我们可以假设，一个面光源的成像，相当于许多个点光源成像的相干叠加，假设是 n 个。这 n 个点光源，每个占据的视直径大小为 δ。天体被镜头捕捉到的总功率为 nP，假设镜头的焦距为 f。根据相似三角形的原理，此时的摄影放大率可以写成 $\eta = f/r$，其中 $f \ll r$，天体朝向我们的截面的实际面积为 $n(\delta \times r)^2$，在像平面上成像的面积为

$$n(\delta \times f)^2 \tag{2}$$

定义：像的平均表面亮度等于镜头接收到天体的总光通量除以像的面积。套用公式 1和公式 2, 并定义焦比 $F = f/D$, 于是表面亮度

$$L = \frac{nPD^2}{16r^2 n\delta^2 f^2} = \frac{P}{16r^2\delta^2 F^2}. \tag{3}$$

我们注意观察一下公式 3中的 $P/(r^2\delta^2)$ 代表的含义。P 是组成天体的每一个点的总亮度，而 $(r\delta)^2$ 恰好是天体上每一个点占据的截面积。于是这一项就有了天体表面亮度的含义。需要注意，这里我们都是把天体理想化成各处一样亮的存在。

现在，成像的表面亮度有了更简单的表达:

$$L \propto \frac{\beta}{F^2} \tag{4}$$

成像的表面亮度 L 与天体的表面亮度 β 成正比，与焦比 F 值成反比。所以，对于摄影器材而言，焦比这个物理量唯一地决定了成像的表面亮度。

结论 2: 对于同一天体，成像的表面亮度与焦比成反比

表面亮度从量纲上来看，表示的是“每平方毫米平均辐射功率”的量纲。换一种表述，就是光子的流量密度。单位面积的像平面上在每秒钟内能接受多少个光子?

有一个奇怪的问题，从点光源到面光源，我们现在有两个完全不同的结论，那么从面光源到点光源的过渡，这个结论是怎么“突变”的?

请注意，这两个结论都是只考虑了几何光学，即平行光汇聚的结果是一个理想点。但实际上由于望远镜的口径有限，平行光汇聚的结果是一个艾里斑。你要是计算艾里斑各处的表面亮度，它依然符合结论 2，即焦比越长艾里斑在像平面上的大小就越大，艾里斑的直径等于 $1.22\lambda F$，其中 λ 是波长，F 是焦比。但艾里斑绝大多数能量集中在它的中心，所以当相机的一个像素的尺度大于艾里斑的尺寸时，可以把它近似看成点光源，结论 1 所说的事实也就近似成立了。

把 3式乘以像的面积 $n\delta^2 f^2$，就变成了像的总光通量

$$\phi = nPD^2/(16r^2), \tag{5}$$

于是总光子流量只与口径的平方成正比。任何一个天体，在口径确定的镜子上，投影到像平面上的总光子流量是不变的。如果你延长焦距，它的光辐射强度就会像煎饼果子一样越摊越薄，最终变成一个大而暗淡的像。相反如果你减焦，他就会变成一个小而亮的像。

结论 3: 根据 5式和 4式，口径决定了成像的总光子流量，而焦比决定了光线的空间分配。

3 重新审视星系和星云的摄影

3.1 信噪比

为了弄清楚拍星系和星云的“效率”是什么，我们要引入“信噪比”的概念。顾名思义，就是信号和噪声的比值。天文摄影中，信噪比的定义：

$$SNR = \frac{P_{stellar}}{\sqrt{\langle P_{stellar}\rangle + \langle P_{sky}\rangle + \langle P_{thermal}\rangle + \sigma_{RN}^2}} \tag{6}$$

这里的变量很多，一项一项地讲：

1）$P_{stellar}$，这是每一帧中，某个像素上来自于天体的光电子数

2）P_{sky}，每一帧中，这个像素上来自于天光的光电子数

3）$P_{thermal}$，每一帧中，这个像素上来自于暗电流的光电子数

4）σ_{RN}，表示读出噪声的标准差。

其中，带有 P 符号的，都是泊松噪声。这一类噪声的标准差等于它均值的平方根，$\langle\cdot\rangle$ 表示平均值（期望）。所以底下开根号的那些项，其实就是这些噪声方差的加和。这是很自然的法则，不相关的几个随机变量叠加之后，方差按简单加法计算。这些方差相加之后开平方，就是总噪声的标准差了。

结论 4: 照片叠加 N 张以后，信噪比提高到原来的 $\sqrt{N}$ 倍。

这个结论我们可以给一个简易的证明。注意公式 6的右面部分，如果叠加 N 张，那么很显然信号要叠加，噪声也要叠加。信号叠加的结果是 $P_{stack} = N \times P_{stellar}$。噪声也应该相加，我们把每一项的噪声方差相加，$\langle P_{stellar}\rangle \rightarrow NP_{stellar}$，剩下的项同理。所以，$N$ 张的信噪比可以写作：

$$\begin{aligned} &SNR_{stack} \\ &= \frac{NP_{stellar}}{\sqrt{N\langle P_{stellar}\rangle + N\langle P_{sky}\rangle + N\langle P_{thermal}\rangle + N\sigma_{RN}^2}} \\ &= \sqrt{N}SNR \end{aligned} \tag{7}$$

这些信号和噪声叠加的时候，注意我没有在分子（信号）上添加暗电流的平均值和天光的平均值以及 bias 的平均值。原因在于，如果你相信这些东西能代表信噪比的话，我白天拍星岂不是信噪比最高了？喵喵喵？这不合逻辑呀。

确实不符合。所以衡量信噪比还有一个更好的方式，那就是不用强度来除以噪声，而是要用一个小区域内信号的标准差除以噪声的标准差。使用局域标准差进行度量，“信号”就从一个绝对的值变成了一个相对的值，有了“反差”的含义。而随着叠加张数的增加，小区域内每个像素的数值都会跟张数 N 成正比，标准差也会遵循这个规律。所以 7式分子上的 $NP_{stellar}$ 只要改成 ($N \times$ 局域标准差)，证明仍然成立。

如果我们单张曝光时间够长，则读出噪声 σ_{RN} 可以忽略。这时候我们有简单的结论 5: 光子数量直接决定了信噪比。

$$SNR \propto \sqrt{P_{stellar}} \tag{8}$$

拓展一下，天体像的光子数量决定了这个天体所拥有的信噪比，整个画面的光子数量决定了这个画面的信噪比。

3.2 星系和星云

提高信噪比的一种方式是叠加，另外一种方式其实是像素合并。把临近的四个像素合并成一个，图像长宽都变成了原来的 1/2，之后按照公式 7计算，信噪比直接翻倍，岂不美哉？

醒醒，这是不是想得太美了啊？我当场就念了兔子的两句诗：

要想出图好
bin8 少不了
一缩遮百丑
就是图太小

通过像素合并的方式，我们能提高信噪比，可是换来了分辨率的减半。可见在这个例子里，我们必须在信噪比和分辨率之间做出取舍。既然有取舍，就意味着一定有一个新的守恒量是有意义的。

假设你 bin2，bin2，再 bin2，bin 到妈都不认识，直到星系成为一个点，每一次 bin2，分辨率减

半，信噪比提高一倍；再 bin2，分辨率再减半，信噪比再提高一倍。

问题是，谁不变？当然是信噪比乘以"星系的直径"之后得到的这个物理量不变了。设系统的分辨率为 μ arcsec/pixel，我们定义一个崭新的物理量：每角秒的信噪比，记作 SNR_p。假设星系的像中，每个像素的信噪比都相等，且星系占据了 m 个像素，每角秒的信噪比可以写作：

$$
\begin{aligned}
&SNR_p = \\
&\frac{\mathrm{SNR}}{\mu} = \frac{\sqrt{m}\mathrm{SNR}}{\sqrt{m}\mu} \\
&= \frac{\sqrt{m \times P_{stellar}}}{\sqrt{m}\mu} \\
&= \frac{\sqrt{P_{total}}}{\sqrt{m}\mu}
\end{aligned} \tag{9}
$$

其中 P_{total} 是成像的总光子量，根据 5 式，总光通量只与口径相关。而这个式子的分母代表的含义是星系占据的视角大小。$\sqrt{m}$ 从量纲上可以认为是这 m 个像素聚成一团所占据的尺度。于是，一条重要的结论出来了。

结论 6：一个天体每角秒的信噪比，与口径成正比，与焦比无关。

在这里，我举一个最简单的例子来帮助大家理解。一台 100F/4（例如宾得的 100F/4）的镜子，和一台 100F/8 的镜子拍同一个星系，前者使用 4.5um 像素的相机，后者使用 9um 像素的相机。如果两者量子效率一致，谁的速度快？答案是一样快。首先很显然的，这两个系统的摄影分辨率是一样的，都是 2.32 角秒/像素。根据 3式，表面亮度与焦比的平方成反比，那么第二个系统每平方微米上每秒钟接受到的光子是第一个系统的 1/4。然而第二个系统一个像素是第一个系统的四倍，所以两者每个像素接受到的光子是一样多的，所以每角秒的信噪比，两者一致。

再拓展一步，如果第二个系统也是 4.54um 的像素大小呢？结论也是一样的，只需要把后者的图像 bin2 就可以了。

当我们拍星系时，我们到底在拍什么？

我想，大多数人对此的答案应该是"细节"吧。爱好者级别的望远镜，遇到良好的环境可以拍到如图 2这样的细节。嗯，反正我们拍星系的时候想看到的肯定不是这样的，星系背后深邃的太空（见图 3）。

图 2: 波德星系

图 3: M51

如果你用一个同口径焦比更长的镜子，虽然表面亮度降低了，但这时候我们可以使用像素面积大的相机或者后期合并像素去提高效率。与它相比，使用短焦比的镜子要想得到相同的分辨率，就必须找到像素面积很小的芯片，但在整个过程中，每角秒的信噪比还是不变的。换句话说：拍摄星系我们是要看细节的，使用焦比短的镜子并不会比焦比长的镜子吃亏。

所以为什么哈勃望远镜的焦比为 F/24，哈勃根本不在乎所谓的表面亮度，哈勃的使用者们更在乎

每角秒的信噪比。并且哈勃升空的时代，相机的像素面积都非常大，这就决定了望远镜需要使用很长的焦比才能获得高分辨率。

如果我们不追求这个“每角秒的信噪比”，也就是说，我们看图的时候只在乎最终输出一定像素数量的图像时信噪比是否高，而根本不考虑分辨率是多少，这时候我们应该看哪些指标?

有另一个指标可以考虑: 每百万像素的信噪比。这个百万像素指的是原图经过 bin2 bin3 或者分数重采样之后得到的小图，而不是截取一块。

有这个追求的典型场景之一就是拍广域星云。这时候我们追求的，其实是画面上的总光子量。结论 5 所描述的铁一样的事实在这里依然成立。既然成像的光子密度与焦比的平方成反比 (见 4式)，而拍广域星云时我们一般就使用传感器的总面积，所以:

结论 7: 判定拍摄星云的效率可以用这样一个指标: 传感器面积除以焦比的平方。这个数值越大，表示拍摄广域星云的效率越高。考虑到各个传感器的量子效率不同，这里也要乘以传感器的量子效率。

4 总结

通过上述分析和证明，我们得到了七条有用的结论，再在这里强调一遍。

1: 点光源成像的亮度，与焦比无关，只与口径的平方成正比。

2: 对于同一天体，成像的表面亮度与焦比成反比

3: 根据 5式和 4式，口径决定了成像的总光子流量，而焦比决定了光线的空间分配。

4: 照片叠加 N 张以后，信噪比提高到原来的 $\sqrt{N}$ 倍。

5: 光子数量直接决定了信噪比

6: 一个天体每角秒的信噪比，与口径成正比，与焦比无关。

7: 判定拍摄星云的效率可以用这样一个指标: 传感器面积乘以量子效率再除以焦比的平方。这个数值越大，表示拍摄广域星云的效率越高

这样，我们把焦比口径和效率这个很多人在论坛上争论不休的话题，终结了。

5 信噪比和分辨率是一对矛盾

明白了以上那些关于信噪比的基础，可以总结出这样一条规律来：信噪比和分辨率是同一事物的不同方面。

初看起来这个规律十分滑稽。但是可以举几个例子：

1）像素合并 (bin2,bin3,bin4...)。四个像素合并，信噪比提高至 $\sqrt{4} = 2$ 倍，分辨率降低至 $1/2$。这是上文已经讲过的东西。

2）第八篇笔记里提到的反卷积，实际上是一种拿信噪比来换分辨率的手段。信噪比不够的片子是不建议使用反卷积的。另外细心的童鞋一定注意到了，反卷积之后的片子，低信噪比区域（背景）总是出现橘子皮状凝结的噪声，这也是拿信噪比来置换分辨率的一种后果。

3）口径相同的镜子，焦比越长，分辨率越高，每像素的信噪比越低。

4）小孔成像。如果开的孔足够小，来自物体的所有光线都会经过小孔上的同一个点达到像平面。但这显然太暗了，于是有没有让像变亮的办法呢？扩大孔的直径就完了！但随着孔的直径增大，会有乱七八糟的不经过孔中心的光线落到像平面上，造成了像和实物中的点并不是一对一的关系，而是一个实物中的点发出的光线可以投射到像上的多个点上。这就把像模糊掉了。更精准地数学表达是，理想的像函数对一个圆孔函数做卷积，得到了不理想的小孔成像的像函数（这个思想在第八篇笔记图像复原中有提到过）。所以你看，亮度（信噪比）提高了，分辨率就降低了。这种情况下你可以拿圆孔函数做 psf 来个反卷积，然而又是拿亮度去换分辨率，有这个精力直接把孔打小一点多好。

5）降噪。最简单的降噪就是高斯模糊。给原图卷积上一个高斯核函数，就实现了降噪。请记住所有的降噪都带有一定的空间关联性，即每个像素降噪后得到的数值都不仅仅来自于降噪前这个像素的

数值，还含有来自临近像素的信息。这样操作之后整体信噪比提高了，图像更平滑，然而分辨率损失了。复杂一点的降噪会出有各式各样的算法，但降噪的力度增加了，分辨率必然会损失。只是看关键位置的细节还在不在。如果在，就说明降噪成功地欺骗了眼睛，降噪的目的也就达到了。

6）Drizzle。以 Drizzle 为代表的超分辨率成像，对原片的要求是有点苛刻的。素材拍摄的帧数要比较多才能得到明显的超分辨率成像效果。然而当曝光总时间一定的时候，考虑到相机读出噪声的影响，短曝多叠的方式必然引起读出噪声在整个曝光进程中占的比例过高，从而降低信噪比。这也是一个得了分辨率降低信噪比的案例。

7）Lucky Imaging。中文翻译一般叫做幸运成像，这是一个从行星摄影那边借用来的手段。在行星摄影中，为了避免辣鸡视宁度的影响，我们通常会采用高帧率摄影，后期处理的时候再去掉很大一部分画质模糊的帧，再叠加。由于行星的亮度往往很高，信噪比也高，所以这样操作对于行星摄影的影响并不大。这种操作的本质就是牺牲了信噪比（或者说画面的平滑度）以获取更高的分辨率，好在行星摄影并不缺信噪比，缺的恰好就是分辨率。深空摄影的幸运成像法类似，以几秒钟曝光一张的时间拍摄，再在叠加时舍弃相当比例星点肥大的单张。1s 的曝光 x3000 张以后，舍弃了百分之 50 的帧，最后只有 1500s 能用。信噪比显然是不如 300s×10 张的，却拿到了视宁度优秀的瞬间。对于拍摄一些小而亮的星系来说，很划算。这种方法也有读出噪声占比过高的问题，也会降低信噪比。

说了这么多，信噪比和分辨率在天文摄影里是一对矛盾，看你怎么取舍。